

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

S 372
(SP 100)

^{er}
I s / een grondslagenprobleem voor de statistiek ?

W. Molenaar

(Algemeen Nederlands Tijdschrift voor Wijsbe-
geerte en Psychologie, 58 (1966), no3
p. 160-168)

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM



1966

*Is er een grondslagenprobleem van de statistiek?*¹

door

W. Molenaar

Inleiding

In één van de bekendste handboeken over statistiek wordt opgemerkt: „In statistics it is a mark of immaturity to argue overmuch about the fundamentals of probability theory”². De keuze van mijn onderwerp is dus een teken van onrijpheid; een ander bezwaar is de uitgebreidheid van de stof, en de onmogelijkheid van een bespreking die voor leken en tegelijk voor statistici belangwekkend is. Bovendien zijn diverse leden van de Vereniging voor Logica, in de eerste plaats onze (toenmalige) voorzitter professor Freudenthal, heel wat deskundiger dan Uw inleider. Toch wil ik het grondslagenprobleem van de statistiek aan de orde stellen, op grond van mijn overtuiging dat het zowel voor statistici als voor grondslagenonderzoekers vruchtbaar kan zijn zich in de controversen op dit gebied te verdiepen.

Met verwaarlozing van nuances kan men de interpretaties van het kansbegrip indelen in frequentistische en subjectivistische. Ik zal een poging doen beide opvattingen in het kort weer te geven. Daarna zal gesproken worden over het oplossen van beslissingsproblemen, waarbij verschillen van mening tussen de „scholen” zullen worden aangestipt. Een voorbeeld uit het dagelijks leven zal de mathematische theorie verduidelijken. Er wordt niet gepretendeerd dat de presentatie ook maar enigszins volledig is, en evenmin dat een verzoening tussen de beide groeperingen thans mogelijk is.

Frequentisten

De oudste kansdefinitie, afkomstig van Laplace, spreekt van „het quotiënt van het aantal voor een gebeurtenis gunstige gevallen en het totale aantal gelijkelijk mogelijke gevallen”. Deze definitie is circulair, omdat een omschrijving van „gelijkelijk mogelijk” steeds weer bij het kansbegrip uitmondt: in het voorbeeld van worpen met een zuivere dobbelsteen is het moeilijk „zuiver” anders te definiëren dan met verwijzing naar de worpresultaten. Een ander bezwaar komt haar voren als men aan een onzuivere dobbelsteen denkt: als bij vijfduizend worpen duizend maal een zes is opgetreden wil men de „kans op zes” ongeveer 1/5 noemen, maar dit betekent niet dat er vijf even plausibele mogelijkheden zijn, waarvan er één gunstig is!³

Voor de invoering van de frequentistische kansdefinitie, die deze

¹ Lezing gehouden op 16 januari 1965 voor de Vereniging voor Logica en Wijsbegeerte der Exacte Wetenschappen. Rapport S 372 (SP 100) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

² M. G. Kendall and A. Stuart, *The advanced theory of statistics*, deel I p. 180, Griffin, London, 1958.

³ Voorbeeld ontleend aan: L. N. H. Bunt, *Statistiek voor het VHMO*, Wolters, Groningen.

bezwaren wil ondervangen, kan men zich als didactisch hulpmiddel een prullenmand voorstellen, waarin zich N papiertjes bevinden. Bij elk kenmerk S (zoals een gele kleur, een vierkante vorm, aanwezigheid van een opgedrukt cijfer 3) dat een papiertje al dan niet kan hebben, definieert men het frequentiequotiënt $f_q(S) = N(S)/N$, waar $N(S)$ het totale aantal papiertjes met kenmerk S is. De volgende eigenschappen zijn dan direct duidelijk:

$$0 \leq f_q(S) \leq 1; f_q(S) = 0 \text{ resp. } 1 \text{ als geen resp. elk element het kenmerk } S \text{ bezit; } f_q(S \text{ of } T) = f_q(S) + f_q(T) - f_q(S \text{ en } T).^1$$

Het is de taak van de beschrijvende statistiek, die men ook statistiek van de frequentiequotiënten mag noemen, de metingen of waarnemingen aan alle N elementen van de zg. populatie (= prullenmand) in beknopte vorm samen te vatten. Bij grote populaties wordt het kostbaar om alles te meten; als de populatie denkbeeldig is, en bijv. bestaat uit alle opeenvolgende worpen met een gegeven muntstuk, is het zelfs onuitvoerbaar. Men beroept zich dan op de ervaring, samengevat in de „experimentele wet van de grote aantallen”, dat het f_q in een aselechte steekproef bij toenemende steekproefomvang steeds minder afwijkt van het f_q in de populatie.

Een geïdealiseerd model² van deze experimentele situatie vindt men in de axiomatische opbouw van de waarschijnlijkheidsrekening volgens Kolmogorof, die als grondbegrippen gebruikt een basisverzameling Ω van elementen ω , een σ -algebra $\mathcal{A}$ van deelverzamelingen van Ω en een maat P op $\mathcal{A}$ waarvoor $P\{\Omega\} = 1$ geldt. Een σ -algebra is een niet-lege klasse van deelverzamelingen die gesloten is onder de vorming van complement, aftelbare doorsnede en aftelbare vereniging; een maat is een niet-negatieve aftelbaar-additieve verzamelingsfunctie; kennis van deze begrippen is voor het volgende niet strikt nodig.

Voor een groot aantal statistici, o.a. Freudenthal en wijlen Van Dantzig, is de kous hiermee af. Zij beantwoorden de vraag in de titel van mijn lezing ontkennend: een onderzoeker die statistische methoden wenst te gebruiken moet een geschikt triple $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ zoeken, een geschikt model, en een model is geschikt als de er uit voortvloeiende voorspellingen redelijk goed uitkomen. De situatie is volgens hen niet anders als bij iemand die een bewegend voorwerp voorstelt als een massapunt, een calorimeter als perfect geïsoleerd beschouwt, enz. Vanuit de realiteit bouwt men zich een wiskundig model; binnen dit model volgen langs deductieve weg een aantal conclusies, die tenslotte weer „terugvertaald” worden in de realiteit. Strikt genomen moet de conclusie dan luiden „als het model *** een voldoende nauwkeurige beschrijving van de situatie inhoudt, dan mag men verwachten dat ***”.

Het is vanzelfsprekend niet de bedoeling, dat een statisticus deze redenering gebruikt om de verantwoordelijkheid voor de modelkeuze aan zijn cliënt te laten. Hij zou dan a.h.w. het vuil op een hoopje voor zijn deur

¹ „of” wordt in niet-exclusieve zin gebruikt: elementen die beide kenmerken bezitten worden in het rechterlid dubbel geteld en dan weer afgetrokken.

² De term „model” is hier niet bedoeld in de technisch-logische zin, maar in de (daaraan enigszins tegengestelde) zin waarin een fysicus van wiskundige modellen spreekt.

vegen: zelf beweegt hij zich in zijn schone kamer van axiomatische wetenschap, en het wordt aan de hem raadplegende cliënten overgelaten door het vuil van de modelkeuze heen te stappen. Het is beter het model, indien mogelijk, statistisch te toetsen (al biedt dit geen volmaakte garanties, maar dat biedt statistiek nooit) en de relatie tussen realiteit en model intensief met de cliënt te bespreken. Men zou zich daarbij kunnen baseren op de volgende vier interpretatieregels van de axiomatische theorie, afkomstig van D. G. Kendall:

- I. De formele theorie (gesymboliseerd door Ω, A, P) is alleen toepasbaar op herhaalbare verschijnselen, die niet steeds dezelfde uitkomst hebben, en waarbij het voorstelbaar is dat de uitkomsten bij verschillende herhalingen elkaar niet beïnvloeden.
- II. Men identificeert elk element ω van Ω met een individuele denkbare uitkomst (bij een dobbelsteenworp zal Ω bijv. bestaan uit de aantallen ogen: 1,2,3,4,5,6). Elke deelverzameling A van A komt overeen met een gebeurtenis of eventualiteit (in het voorbeeld: „even”, „minstens drie”, enz.). Men kiest een klasse A die alle van belang zijnde gebeurtenissen bevat, maar die overigens (uit economische overwegingen) zo klein mogelijk is. Op wiskundige gronden is het wenselijk dat A een σ -algebra is, zodat we logische operaties en limiet-overgangen vrijelijk kunnen toelaten.
- III. Als twee experimenten ε_1 en ε_2 met resp. structuren (Ω_1, A_1, P_1) en (Ω_2, A_2, P_2) na elkaar worden uitgevoerd zonder verband tussen de uitkomsten, dan behoort bij dit samengestelde experiment de maattheoretische produkt-structuur $(\Omega_1 \times \Omega_2, A_1 \times A_2, P_1 \times P_2)$.
- IV. Als $P\{A\} = 1$ is voor zekere A uit A , dan zullen wij het optreden van A met volledig vertrouwen voorspellen.

Als men deze regels aanvaardt, kan men $P\{A\} = 0$ interpreteren via $P\{\text{non}-A\} = 1$. Wanneer voor een gissing A over de uitkomst van een experiment ε gevonden is $P\{A\} = p$, waar p een getal is met $0 < p < 1$, dan stelle men zich voor dat ε n keer zonder verband tussen de uitkomsten herhaald wordt en dat hierbij $r(A;n)$ keer A bevestigd wordt; dan is met volledig vertrouwen te voorspellen dat $\lim r(A;n)/n$ bestaat en gelijk aan p is.

Voor een statisticus is deze opzet van Kendall aantrekkelijk door het gebruik van de beperkte regel IV en de sterke wet van de grote aantallen. Maar tegen de koppeling van het wiskundige limietbegrip aan de experimentele grootheid $r(A;n)/n$ zijn bijna evenveel bezwaren aan te voeren als tegen de ermee verwante pogingen van Von Mises om kansen als limieten van frequentiequotiënten te definiëren.

Subjectivisten

In grote lijnen kan men zeggen, dat de subjectivisten bovenstaande theorie en interpretatie gekunsteld vinden. Herhaalbare en onafhankelijke experimenten bestaan niet en zuivere dobbelstenen evenmin, zeggen zij. Bovendien wensen zij duidelijk vast te leggen, dat kansen afhankelijk zijn van onze kennis van de situatie: bij een frequentist speelt deze wel een rol bij de modelkeuze, maar niet binnen het model.

Zo komt Keynes tot de definitie: probability is the degree of reason-

able¹ belief that our corpus of knowledge authorizes us to entertain. Als de hypothese A een logische implicatie is van de voorkennis H, dan is $P\{A | H\} = 1$; is deze kans kleiner dan 1 dan geldt er een soort verzwakte implicatie. Bij alle subjectivisten is de kans een functie van de twee argumenten A en H. De krachtigste poging om de kansrekening te beschrijven als een inductieve logica, met verzwakte implicatie, vindt men bij Carnap. Hij geeft drie intuïtieve omschrijvingen (explicanda) van het formele begrip (explicatum) „kans”, en wel: „measure of evidential support”, „degree of confirmation” en „fair betting quotient”. Bij de laatste term, die men ook bij Savage vindt, wordt verondersteld dat er precies één bedrag is waarom twee mensen met voorkennis H willen wedden dat A zal gebeuren tegen een vaste uitkering voor de ander als A niet gebeurt. Het is niet geheel juist Carnap een subjectivist te noemen, omdat hij zekere redelijke¹ eisen stelt waardoor zijn functie $P\{A | H\}$ geheel vast ligt. Bij echte subjectivisten zoals Savage gedraagt elk individu zich wel redelijk¹, maar kan iedereen binnen die grens toch verschillende conclusies uit dezelfde voorkennis H trekken; $P\{A | H\}$ kan voor ieder mens, en ook voor dezelfde mens met dezelfde voorkennis maar op een ander tijdstip, verschillend uitvallen.

Voor het leerproces, of het redeneren door inductie, beroepen de subjectivisten zich op de stelling van Bayes, die aangeeft hoe een a priori waarschijnlijkheid bij het kennis nemen van de uitslag van een relevant experiment gemodificeerd wordt tot een a posteriori waarschijnlijkheid. Een klein bezwaar van de methode is dat elke hypothese met a priori waarschijnlijkheid nul ook een a posteriori kans nul krijgt, ongeacht de uitkomst van het experiment. De middeleeuwers die het voor onmogelijk (kans nul) hielden dat de aarde om de zon draaide zouden dan nooit door Galilei c.s. overtuigd zijn geraakt.

Een ernstiger bezwaar is de onmogelijkheid precies aan te geven wat relevante voorkennis is. Carnap's bewering dat deze voorkennis geformaliseerd kan worden tot een stelsel volzinnen lijkt mij voor bestrijding vatbaar. Het is ook niet duidelijk waarom alle voorkennis gebruikt zou moeten worden bij het toekennen van kansen: bij de constructie van een cirkel door drie gegeven punten of bij de berekening van de remweg van een auto die 50 km per uur rijdt gebruikt men ook niet de vermoedelijke plaats van het middelpunt resp. de gissing dat de remweg tussen 10 en 60 m lang zal zijn.

Beslissingstheorie

Men zou de taak van een statisticus kunnen omschrijven als het nemen van beslissingen, op grond van voorkennis en/of experimentele gegevens, wanneer men met een onzekerheid geconfronteerd wordt. Voor een nadere omschrijving kan men het begrippen-apparaat gebruiken van de spel-

¹ De omschrijving van „reasonable” blijft even onbevredigend als die van „zuiver” enige bladzijden terug. Ontdaan van alle franje komt het er op neer, dat iemand redelijk is, als hij bij het toekennen van kansen te werk gaat volgens de door de auteur opgestelde regels. Dit leidt Barankin tot de verzuchting „why do scientists tell people what they should do, and are incompetent of describing what they do do?”

theorie, zoals die door Von Neumann en Wald is ontwikkeld. Wij zullen proberen, de interpretaties van zo'n beslissingsprobleem door een subjectivist (Savage) en een frequentist (Lehmann) in het kort weer te geven en aan een voorbeeld toe te lichten.

Men veronderstelt dat in een onzekere situatie een beslissing wordt genomen, waarna na enige tijd de onzekerheid wordt opgeheven – wij zullen zeggen dat de *toestand* bekend wordt – en dat aan de combinatie van de beslissing en de toestand een zeker verlies of een zekere winst verbonden is. Voortaan zullen wij alleen over verlies spreken, en een winst interpreteren als een negatief verlies. Zo zal een winkelier, die eens per maand goederen bij de groothandel bestelt, verlies lijden als hij in de loop van de maand niet aan de vraag kan voldoen omdat zijn voorraad te klein is, maar ook als hij te veel besteld heeft en er daardoor kostbare opslagruimte in beslag wordt genomen (of als het artikel bederft bij te lang bewaren). Bij ieder paar van beslissing (bestelde hoeveelheid) en toestand (vraag gedurende de maand) behoort dus een bedrag aan verlies.

Zowel subjectivisten als frequentisten gaan er van uit, dat men dit verlies bij elke denkbare combinatie van beslissing en toestand exact kan bepalen. In een industriële onderneming is dit wellicht het geval, hoewel ook daar moeilijk na te gaan is hoeveel goodwill, en daarmee hoeveel toekomstige orders, verloren gaan als het bedrijf een partij ondeugdelijke goederen aflevert. In de persoonlijke sfeer (sluiten van een levensverzekering, besluiten waarheen met vakantie te gaan) heeft men meestal hoogstens een vaag idee over de grootte-orde of de onderlinge rangorde van de verliezen bij de diverse combinaties van besluit en toestand.

Als leidraad bij de beslissing geldt nu, dat men geacht wordt het verwachte verlies zo klein mogelijk te maken (dus, als negatief verlies mogelijk is, tracht U de winst te maximaliseren). Maar dit houdt in dat het U onverschillig moet zijn of U een biljet van $f\ 10,-$ in Uw zak houdt, dan wel het als inzet betaalt voor een loterij met tien procent kans op een uitkering van $f\ 100,-$ of met 0,01 procent kans op $f\ 100.000,-$ of met 0,001 procent kans op $f\ 1.000.000,-$. Voor de meeste mensen zijn deze vier mogelijkheden niet gelijkwaardig: een particulier kan bijv. met een ton al zo tevreden zijn dat hij niet met een tiende kans op een miljoen wil gokken. Dit geldt niet voor een zakenman die een dreigend failliet alleen kan afwenden door zijn concurrent voor een half miljoen uit te kopen, en ook niet voor iemand met principiële bezwaren tegen loterijen. Als bij een beslissing b de situatie met een kans $p_1(b)$ zal leiden tot een verlies x_1 , zal men niet steeds geneigd zijn de beslissing b te kiezen die $\sum_i p_i(b)x_i$

minimaliseert: niet alleen is het tweede miljoen winst minder aangenaam dan het eerste, maar ook heeft ieder mens de neiging kleine kansen (vooral op onaangename gebeurtenissen!) geheel te verwaarlozen.

Zelfs als men een betere verliesfunctie zou kunnen opstellen, die deze bezwaren niet heeft, dan blijft het nog raadzaam niet alleen op de verwachte winst te letten maar ook zekere veiligheidsmarges aan te houden wat betreft het maximale verlies. Uiterst riskante beslissingen zal men dikwijls niet willen nemen, al zou de eventueel te behalen winst zeer aantrekkelijk zijn. Helaas leidt het invoeren van criteria die naast de ver-

wachting ook de variantie van de winst beschouwen, tot grote wiskundige moeilijkheden.

De subjectivist Savage gaat er nu van uit, dat men bij een beslissing kiezen kan uit zekere „acts”, door ons besluiten te noemen, en dat men daarbij in het onzekere verkeert over de toestand (state of the world), gedefinieerd als „description of the object about which the person is concerned, leaving no relevant aspect undescribed”. Een besluit is nu volgens Savage elke functie, die aan iedere toestand een „consequentie”, met bijbehorend verlies, verbindt. Terecht merkt Van Dantzig¹ op dat deze definitie te ruim is: de functie die aan elke toestand de winstgevendste consequentie verbindt zou nl. ook een besluit zijn, en steeds het verkieslijkste. Aangezien men als subjectivist iedere (subjectieve) kans kan bepalen, kan men nu het besluit kiezen dat het verwachte verlies minimaliseert.

In de frequentistische opvatting van Lehmann baseert men zijn besluit op experimentele gegevens. Men kan een zekere waarneming x doen, uit een kansverdeling waarvan de (onbekende) parameter t mede bepalend is voor de toestand. Zo kan de reeds genoemde winkelier opzoeken, hoeveel hij telkens in de afgelopen maanden verkocht heeft, en dit geeft hem aanwijzingen over de in de komende maand te verwachten vraag.

Al voor de waarneming gedaan is, kan men nu een besluitregel b opstellen van de vorm: als de waarneming straks k wordt, zal ik het besluit $b(k)$ nemen. Laten wij de verliesfunctie met L aangeven, en wel zal het verlies bij toestand t en besluit $b(k)$ genoteerd worden als $L(t, b(k))$. Men veronderstelt nu, dat bij elke toestandswaarde t de kans dat de waarneming k wordt een bekende functie $p(t, k)$ is, en men bepaalt de risicofunctie $R(t, b) = \sum_k p(t, k) L(t, b(k))$. Men moet nu die regel b kiezen die het risico minimaliseert, maar daarbij doet zich de moeilijkheid voor dat de parameter t niet bekend is. Als er een uniform beste regel b_0 bestaat, d.w.z. als voor elke andere regel b en elke waarde van t geldt $R(t, b_0) \leq R(t, b)$, dan is de regel b_0 onze uitverkorene. Maar meestal zal de ene regel voor sommige t -waarden de beste zijn en een andere voor andere t -waarden. Dit zal in het voorbeeld blijken.

Voorbeeld

U staat op het punt met Uw gezin op reis te gaan, en het nog aanwezige voedsel moet worden opgemaakt. Uw vrouw heeft vijf eieren gebroken in een kom om een omelet te bakken. Op dat moment komt U de keuken binnen en roept „ga jij nou maar inpakken, ik zal wel eieren bakken”. Een zesde ei ligt nog naast de kom, en is volgens Uw vrouw van twijfelachtige ouderdom. Er zijn nu twee toestanden mogelijk voor het zesde ei, nl. bedorven en goed, en wij nemen aan dat U drie besluiten kunt nemen: het ei breken in de grote kom, het ei breken in een apart kommetje, of het ei ongezien weggooien. We zullen aannemen dat andere mogelijkheden, zoals zonder ontbijt vertrekken, niet in aanmerking

¹ D. van Dantzig, Statistical Priesthood 1, Statistica Neerlandica 11 (1957), 1-16.

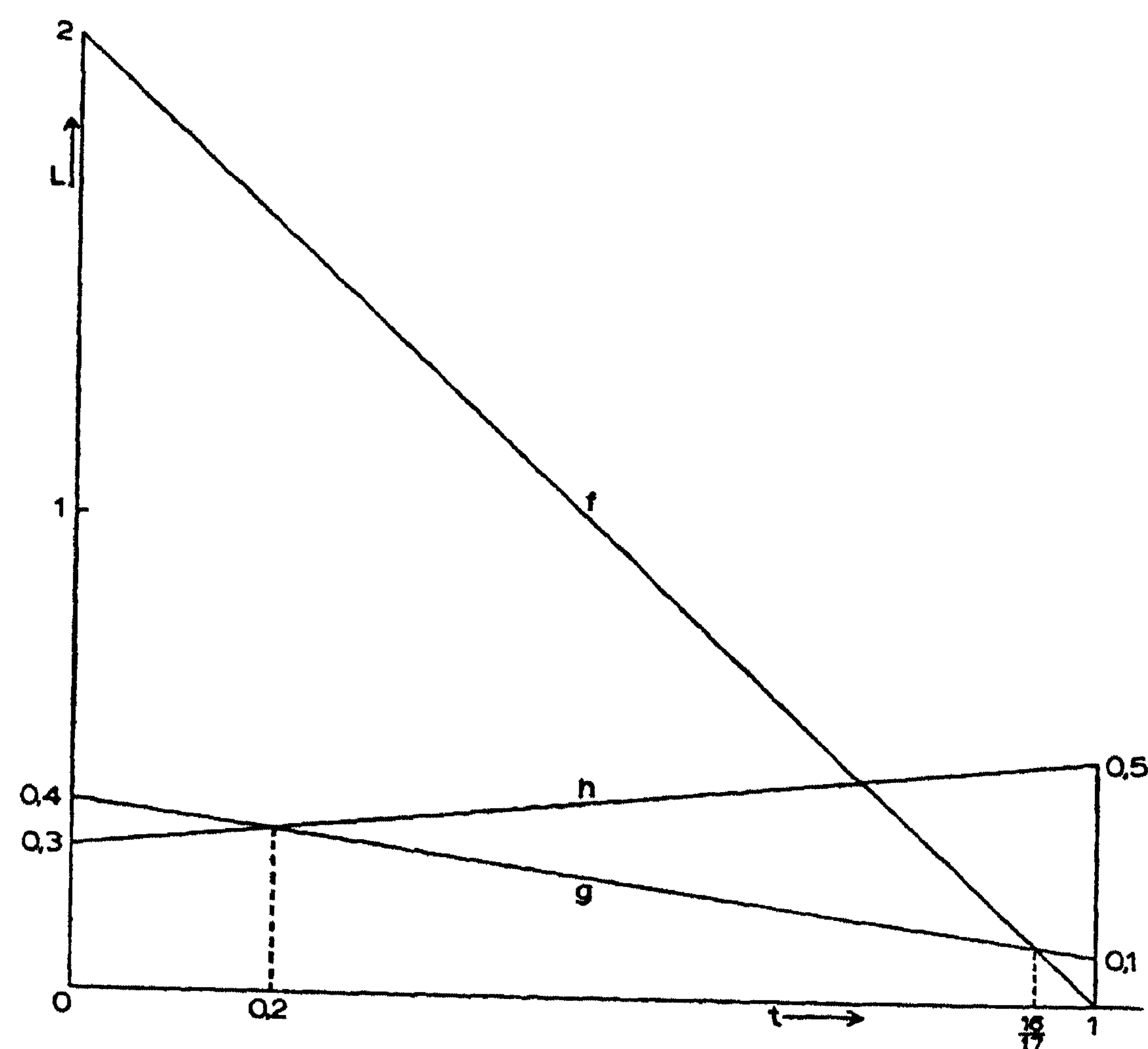
komen. Bij elke combinatie van toestand en besluit behoort nu een consequentie, en deze consequenties met de eraan verbonden verliezen in guldens zijn in de volgende tabel samengevat.

besluit	toestand	
	goed	bedorven
f = breken in kom	omelet van 6 eieren 0	geen omelet, 5 goede eieren verprutst 2,—
g = breken in apart kommetje	omelet van 6 eieren, extra kom in afwas 0,10	omelet van 5 eieren, extra kom in afwas 0,40
h = weggooien	omelet van 5 eieren, 1 goed ei verprutst 0,50	omelet van 5 eieren 0,30

Als parameter t kiezen wij de kans dat het zesde ei goed is. Dus met kans 1—t is het ei bedorven, en t is een onbekend getal tussen 0 en 1. Bij elk besluit behoort nu een van t afhankelijk verwacht verlies, dat uit de tabel volgt:

$$\begin{aligned} L(t,f) &= t.0 + (1-t).2 = 2 - 2t, \\ L(t,g) &= t.0,1 + (1-t).0,4 = 0,4 - 0,3t, \\ L(t,h) &= t.0,5 + (1-t).0,3 = 0,3 + 0,2t. \end{aligned}$$

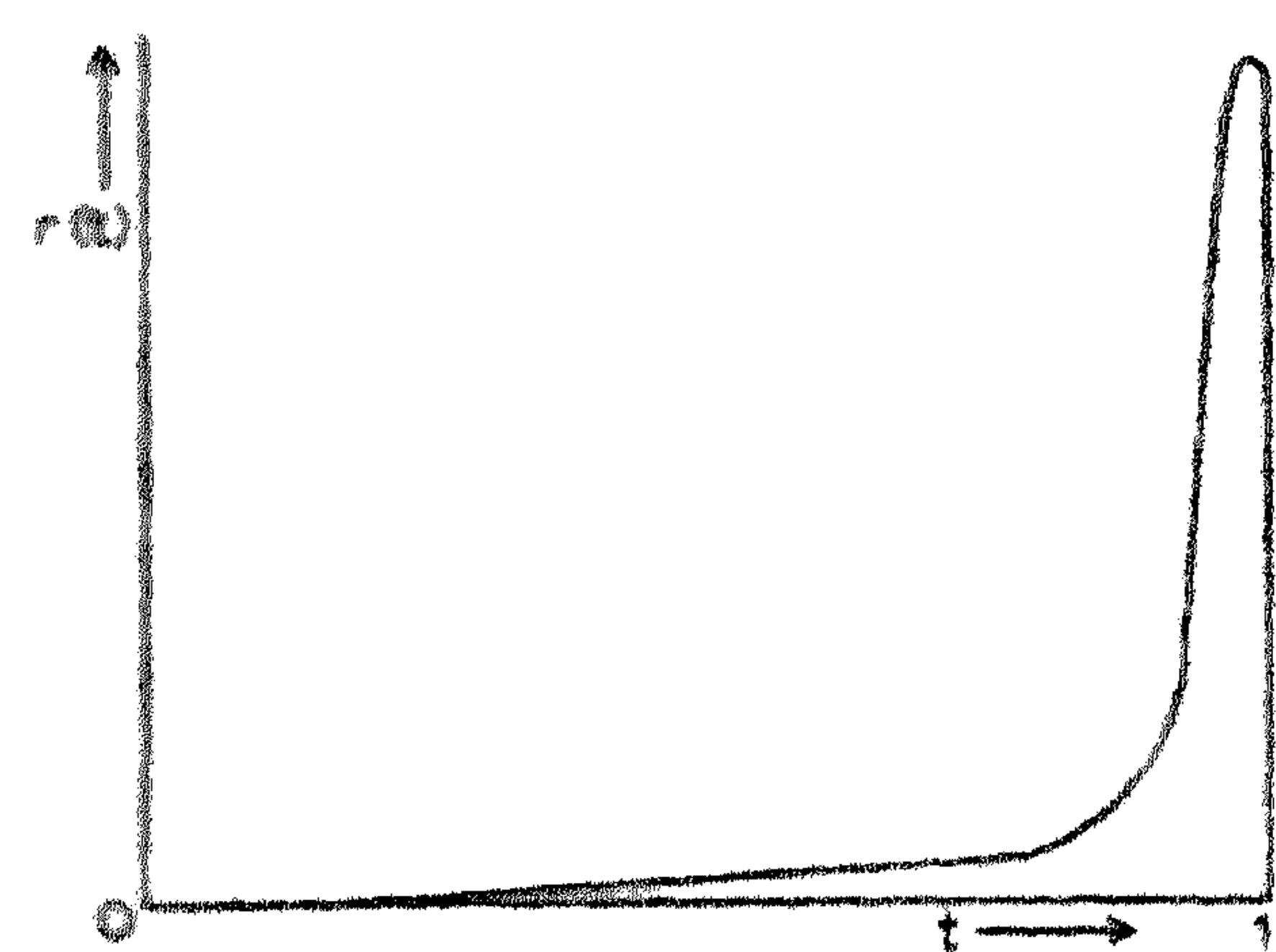
Men ziet in figuur 1 dat voor kleine waarden van t het besluit h het verstandigste is; voor $0,2 < t < 16/17$ levert g het minste verlies op en pas voor $t > 16/17$ is f te prefereren. Zolang wij in het onzekere verkeren over de ware waarde van t is een verantwoorde keuze moeilijk.



FIGUUR I

Een subjectivist zal wellicht tot de subjectieve overtuiging komen dat de kans t op een onbedorven ei één bepaalde waarde t_0 heeft, en dan is de keuze duidelijk (alleen als toevallig $t_0 = 0,2$ is zijn g en h even goed, en analoog voor $t_0 = 16/17$).

De volgelingen van Bayes zijn van mening, dat het meestal niet uitvoerbaar is aan t een getalwaarde t_0 toe te kennen, maar dat men toch wel een idee heeft welke waarden van t het waarschijnlijkst zijn. De parameter t heeft m.a.w. zelf een kansverdeling, en er wordt verondersteld



FIGUUR II

dat de kansdichtheid $r(t)$ van deze zg. a priori verdeling bekend is. Wanneer men veel vertrouwen heeft in zijn melkboer, zal r ongeveer de vorm hebben die in figuur 2 is geschetst: grote waarden zeer plausibel, kleinere waarden uiterst onwaarschijnlijk. Men moet nu de beslissing b nemen, die het verwachte verlies $N(b) = \int r(t) L(t,b) dt$ minimaliseert. Bij de r -functie van figuur 2 zal f de goede keuze zijn. Is men volmaakt

in het ongewisse over de waarde van t , dan kan men $r(t) = 1$ kiezen voor elke t tussen 0 en 1 (elke t -waarde even waarschijnlijk). Dan is $N(f) = \int (2-2t)dt = 1$, en analoog $N(g) = 0,25$ en $N(h) = 0,4$, zodat men het besluit g moet nemen.

Een mogelijk criterium voor niet-subjectivisten is de minimax-regel: kies het besluit b waarvoor $\max L(t,b)$ zo klein mogelijk wordt. In figuur 1 ziet men dat g het laagste maximum over t heeft (en wel 0,4). De meeste auteurs laten ook toe dat men besluit om te loten of te dobbelen om tussen de mogelijke besluiten een keus te maken. Zou men met kans $3/5$ zijn keus op h laten vallen en met kans $2/5$ op g , dan is het verwachte verlies 0,34 ongeacht de waarde van t . De bedoeling van de minimax-regel is, zich te wapenen tegen de meest verliesgevende parameterwaarde. Er zijn diverse voorbeelden waarin deze voorzichtige handelwijze erg onverstandig blijkt te zijn.

In de opzet van Lehmann baseert men zijn beslissing op experimentele gegevens: men weet dat er van n eieren in vergelijkbare omstandigheden k stuks goed bleken te zijn en $n-k$ stuks bedorven. De enige bladzijden terug ingevoerde kans $p(t,k)$ is in dit geval de binomiale kans $\binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$. Wij zoeken nu een besluitregel b , die aan elke mogelijke waarde van k (de gehele getallen $0, 1, 2, \dots$, tot en met n) een besluit $b(k)$ toevoegt en daarbij het risico

$$R(t,b) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} L(t, b(k))$$

minimaliseert. Men kan t schatten door k/n (de fractie goede eieren, volgens de definitie van Laplace) en men kiest dan $b(k) = h$ als $k/n < 0,2$ is, $b(k) = f$ als $k/n > 16/17$ is, en $b(k) = g$ in de overige gevallen.

Tenslotte kan men zich nog voorstellen dat men zowel beschikt over het experimentele gegeven k als over de a priori verdeling met dichtheid

$r(t)$. Men vormt dan volgens de stelling van Bayes de a posteriori verdelingsdichtheid van t gegeven k :

$$f(t | k) = \pi(t) \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} / C, \text{ waar } C = \int_0^1 r(p) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} dp$$

een constante is. Men moet nu de b kiezen die $\int f(t | k) L(t, b(k)) dt$ maximaliseert. Als in ons voorbeeld $r(t) = 1$ is voor alle t , leidt dit tot de regel: kies h als $\frac{k+1}{n+2} < 0,2$ is, kies f als $\frac{k+1}{n+2} < \frac{16}{17}$ is, kies g in de overige gevallen.

Mededelingen

Het 14de Internationale Congres v. Filosofie dat gehouden pleegt te worden onder auspiciën van de Fédération Internationale de Philosophie zal van 2 tot 9 september 1968 te Wenen in Oostenrijk plaats vinden. Nadere mededelingen zullen nog volgen.

Ter gelegenheid van de herdenking van de honderdste geboortedag van dr. Johannes Diderik Bierens de Haan verscheen – in fraaie paperback uitvoering – een bloemlezing uit zijn werk. Deze bundel getiteld „Innerlijk perspectief” bevat 190 pag. Zij is samengesteld door drs. J. J. van der Bend en wordt uitgegeven door Van Gorcum te Assen. Prijs / 10.00.

Ingekomen Boeken

- Adr. van Kaam, *Existential Foundations of Psychology*, Duquesne University Press, Pittsburgh (Nauwelaerts, Leuven), 1966, 386 p.
- M. Merleau-Ponty, *Phänomenologie der Wahrnehmung*, Walter de Gruyter, Berlin, 1966, 585 p. Uit het Frans vert. en ingeleid door Rud. Boehm.
- H. Gouhier, *Les grandes avenues de la pensée philosophique en France depuis Descartes*, Nauwelaerts, Leuven/Parijs, 1966, 95 p.
- Johan Jurgen, *Analyse van een leven, persoonsbeschrijving vanuit een psychoanalyse*, Van Ditmar, Amsterdam, 183 p. Paperback.
- Philia, *Wijsgerige opstellen in vriendschap aangeboden aan prof. dr. J. H. Robbers* S. J., Dekker & Van de Vegt, Nijmegen/Utrecht, 1966, 149 p.
- L. Flam, *Het huis van de wereld*, Wereldbibliotheek, Amsterdam/Antwerpen, 1966, 223 p.
- J. H. Michon, *System der Graphologie*, Ernst Reinhardt Verlag, München/Basel, 235 p. Vert. uit het Frans.
- Dietr. Janke, *Handschriften u. Baumzeichnungen von Kindern als Unterlagen zur charakterologischen Beurteilung*, E. Reinhardt Verlag, München/Basel, 1965, 76 p. en 142 afb.
- B. Delfgaauw, *Wat is existentialisme?* Het Wereldvenster, Baarn 1966, 128 p. 6de herz. dr.
- J. Piaget, *Sagesse et illusions de la philosophie*, Presses Univers. de Fr.; Paris, 1965, 287 p.
- J. J. Dumont, *De ontwikkeling van de intelligentie*, Een monografie over de psychologie van J. Piaget, Malmberg, 's-Hertogenbosch, 1966, 390 p. Nijmeegse bijdragen tot de opvoedkunde 5.
- Edm. Husserl, *Zur Phänomenologie des inneren Zeitbewusstseins (1893-1917)*, Herausgeg. v. Rud. Boehm, Martinus Nijhoff, Den Haag, 1966, XLIII + 483 p. Husserliana Bd. X.
- J. J. M. van der Ven, *Existentie en recht, Schets van een anthropologische rechtsbeschouwing*, H. Nelissen, Bilthoven, 1966, 87 p. Serie: Filosofie & Cultuur.